

ЛЕКЦИЯ-8

5. СИММЕТРИЯЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

§ 5.1. Симметриялық ядролар және олардың кейбір қасиеттері

$L_2[a, b]$ кеңістігінде

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

интегралдық теңдеуін қарастырайық. Егер нақты ядро $K(x, s) = K(s, x)$ шартын қанағаттандырса, оны симметриялық ядро деп атайды. Мысалы,

$K(x, s) = \cos(x + s)$, $K(x, s) = xs + 3x^2 s^2$ симметриялық ядролар. Комплекстік $K(x, s)$ ядросы $K(x, s) = \overline{K(s, x)}$ шартын қанағаттандырса, оны симметриялық эрмиттік ядро деп атайды. Ядросы симметриялық ядро болатын интегралдық теңдеуді симметриялық интегралдық теңдеу деп атайды.

Егер $K(x, s)$ симметриялық эрмиттік ядро болса, онда бұл ядроның қайталанған ядроласы симметриялық болады. Расында, қайталанған ядро анықтамасы бойынша

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt = \int_a^b \overline{K(t, s)} K(x, t) dt = \int_a^b \overline{K(s, t)} \cdot \overline{K(t, x)} dt = \\ &= \int_a^b \overline{K(s, t) K(t, x)} dt = \overline{K_2(s, x)}. \end{aligned}$$

Дәл осылай жалпы жағдай үшін де бұл қасиеттің орынды екенін оңай көруге болады.

Егер $K(x, s)$ симметриялық эрмиттік ядро болса, онда Фредгольм операторы

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

өзіне түйіндес, яғни $K(x, s) = K^*$ болады. Расында

$$K^* \varphi = \int_a^b \overline{K(s, x)} \varphi(s) ds = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = K\varphi.$$

Біз бұдан былай нақты аргументті симметриялық ядроларды қарастырамыз.

§ 5.2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеулердің негізгі қасиеттері

1 теорема. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеуінің әртүрлі меншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті функциялар өзара ортогональ.

Дәлелдеу. Симметриялық $K(x,s)$ ядроның меншікті мәндері λ_1 мен λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ал $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ оларға сәйкес меншікті функциялар болсын. Онда $\varphi_1 = \lambda_1 K \varphi_1$, $\varphi_2 = \lambda_2 K \varphi_2$ теңдеулері орынды. Бірінші теңдеуді $\varphi_2(x)$, ал екіншіні $\varphi_1(x)$ функциясына көбейткеннен соң олардың айырымын интегралдап,

$$\frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_2) - \frac{1}{\lambda_2}(\varphi_1, \varphi_2) = (K \varphi_1, \varphi_2) - (K \varphi_2, \varphi_1) = 0$$

теңдікті аламыз немесе

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) (\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Бұл теңдеудегі $\lambda_1 \neq \lambda_2$ болғандықтан, ол тек $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ болған жағдайда ғана орынды. Теорема дәлелденді.

2 теорема. Симметриялық ядроның меншікті мәндері нақты сандар болады.

Дәлелдеуі. Меншікті $\varphi_0(x) \neq 0$ функциясына сәйкес меншікті мән $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) – комплекс сан деп ұйғарайық. Сонда $\varphi_0(x) = \lambda_0 K \varphi_0$ теңдігі орынды. $\overline{\varphi_0(x)}$ меншікті функциясының меншікті мәні $\overline{\lambda_0}$ болатынын, яғни $\overline{\varphi_0(x)} = \overline{\lambda_0} K \overline{\varphi_0}$ теңдігі орынды екенін оңай байқауға болады. 1 теоремадан $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$ болғандықтан, $\int_a^b \varphi_0(x) \overline{\varphi_0(x)} dx = 0$, демек, $\varphi_0(x) = 0$. Сонымен $\alpha + i\beta$ саны $\varphi_0(x)$ функциясының меншікті мәні бола алмайды.

Ескерту. Меншікті функциялардың әрқайсысының нормасын бөліп нормалауға болады. Одан кейін, егер бір меншікті мәнге бірнеше сызықты тәуелсіз меншікті функциялар сәйкес келсе, онда оларды Шмидтің ортогональдау әдісін қолданып, өзара ортогональдауға және нормалауға болады. 1 теоремадан әртүрлі меншікті мәндерге сәйкес меншікті функциялар өзара ортогональ екенін көргенбіз.

Демек, симметриялық ядроның меншікті функциялары жиынын ортонормаланған система деп есептеуге болады. Бұдан былай, бір меншікті мәнге бірнеше сызықты тәуелсіз меншікті функциялар сәйкес келетін жағдайда, меншікті мәндер тізбегін жазарда, сол меншікті мәнге қанша меншікті функция сәйкес келсе, сонша қайталап жазамыз. Бұдан кейін әрбір

меншікті мәнге жалғыз меншікті функция сәйкес келеді деп айта аламыз. Сонымен қатар келешекте меншікті мәндерді абсолют шамалары бойынша өсетіндей етіп реттеп жазамыз.

Егер меншікті мәндер ақырсыз көп болса, онда Фредгольм теоремасы бойынша олардың шексіздікте шектік нүктелері болуы мүмкін, сондықтан $n \rightarrow \infty$ жағдайында $\lambda_n \rightarrow \infty$ болады.

1 лемма. Екінші қайталанған ядроның меншікті мәндері жиыны сол ядроның меншікті мәндері квадраттарының жиынынан тұрады.

Дәлелдеуі. $K(x,s)$ ядросының меншікті мәні λ_0 -ге сәйкес меншікті функциясы $\varphi_0(x)$ болсын, сонда $\varphi_0(x) = \lambda_0 K \varphi_0$ теңдігі орынды.

Бұл теңдікке $\lambda_0 K$ операторын қолданып, $\lambda_0 K \varphi_0 = \lambda_0^2 K^2 \varphi_0$ теңдеуін аламыз. Одан кейін осы теңдеулерден

$$\varphi_0(x) = \lambda_0^2 K^2 \varphi_0 = \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x,s) \varphi_0(s) ds$$

теңдеуі шығады. Бұл соңғы теңдеуден λ_0^2 саны $K_2(x,s)$ ядросының $\varphi_0(x)$ меншікті функциясына сәйкес меншікті мәні екенін көреміз.

Екінші жағынан, $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні μ_0 , ал $\varphi_0(x)$ оған сәйкес меншікті функциясы болсын, яғни $\varphi_0 - \mu_0 K^2 \varphi_0 = 0$ шарты орындалсын. Бұл соңғы теңдеуді

$$(I + \sqrt{\mu_0} K)(I - \sqrt{\mu_0} K) \varphi_0 = 0 \quad (70)$$

түрінде жазып және $\psi(x) = (I - \sqrt{\mu_0} K) \varphi_0$ деп белгілейік. Мұнда $\psi \equiv 0$ болуы мүмкін. Бұл жағдайда $\sqrt{\mu_0}$ шамасы $K(x,s)$ ядросының φ_0 меншікті функциясына сәйкес меншікті мәні болады. Демек, бұл жағдайда лемма дәлелденеді.

Егер $\psi \neq 0$ болса, (70) теңдеуінен $(I + \sqrt{\mu_0} K) \psi = 0$ екені шығады. Бұдан $\sqrt{\mu_0}$ шамасы $K(x,s)$ ядросының меншікті мәні, ал $\psi(x)$ оған сәйкес меншікті функция. Лемма бұл жағдайда да дәлелденді.

1 лемманың салдары. Егер $K(x,s)$ симметриялық ядро болса, онда қайталанушы ядроның меншікті мәндері оң.

Ескерту. Дәл осылай қайталанған $K_n(x,s)$ ядросының меншікті мәндерінің жиынына $K(x,s)$ ядросының n -дәрежелі меншікті мәндері жиыны дәл келеді.

3 теорема. Кез келген симметриялық ядроның кемінде бір меншікті мәні бар болады.

Дәлелдеуі. Қайталанған $K_2(x, s)$ ядросының кемінде бір меншікті мәні бар екенін дәлелдейік, онда жоғарыда лемма бойынша $K(x, s)$ -тің да меншікті мәні бар болады.

Қайталанған ядро $K_2(x, s)$ -тің λ жазықтығының $|\lambda| \leq \mu$ болатындай облысында меншікті мәні жоқ болсын (мұндағы, μ – кез келген оң сан). Кез келген $\varphi(x) \neq 0$ функциясын алып, жаңадан

$$f(x) = \varphi(x) - \mu K^2 \varphi = \varphi(x) - \mu \int_a^b K_2(x, s) \varphi(s) ds \quad (71)$$

функциясын құрамыз. Әрине, $f(x) \neq 0$. Қарсы жағдайда, яғни $f(x) \equiv 0$ болса, $K_2(x, s)$ ядросының меншікті мәні μ болар еді де теорема дәлелденеді. Сондықтан, (71) теңдеуін бос мүшесі $f(x) \neq 0$, ал белгісіз функциясы $\varphi(x) \neq 0$ болған 2-текті интегралдық теңдеу ретінде қарастырамыз. Бұл теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b R_2(x, s; \mu) f(s) ds,$$

мұндағы, $R(x, s; \lambda)$ жоғарыдағы (71) теңдеудегі $K_2(x, s)$ ядросының резольвентасы. Бұл теңдіктің екі жағын да $f(x)$ функциясына скаляр көбейтсек,

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \mu \int_a^b \int_a^b R_2(x, s; \mu) f(s) f(x) ds dx \quad (72)$$

теңдігі шығады. Жоғарыда біз $K_2(x, s)$ ядросының $|\lambda| \leq \mu$ дөңгелегі ішінде меншікті мәні жоқ деп ұйғардық, олай болса, $R_2(x, s; \mu)$ резольвентасы μ -ға қатысты бүтін функция, яғни оны

$$R_2(x, s; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} K_2(x, s)$$

түрінде өрнектеуге болады. Бұл жағдайда (72) теңдігіндегі интеграл

$$\int_a^b \int_a^b R_2(x, s; \mu) f(x) f(s) ds dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu^{n-1}$$

болып жазылады.

Мұндағы,

$$\alpha_n = \int_a^b \int_a^b K_{2n}(x,s) f(s) f(x) ds dx.$$

Енді осы α_n оң сан екенін көрсетейік. Соңғы өрнектен $\alpha = (K^{2n} f, f) = (K^n(K^n f, f)) = (K^n f, K^n f) = \|K^n f\|^2 \geq 0$. Олай болса, (72) теңдігінен

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \|K^n f\|^2$$

және бұдан $(\varphi, f) > 0$ екені шығады, демек (71) теңдігінен

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|\varphi\|, \quad \forall \varphi(x) \in L_2[a,b]. \quad (73)$$

Енді $K_2(x,s)$ ядросының ешқандай меншікті мәні жоқ деп ұйғарайық. Бұл жағдайда μ санын жеткілікті мөлшерде үлкен етіп, яғни $\mu \rightarrow \infty$ деп алуға болады. Олай болса, (73) теңсіздігінен $\|K\varphi\| = 0$, яғни $\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = 0$ болады. Бұндай кезде $K(x,s) \equiv 0$ екенін дәлелдеу қиын емес. Расында, x -ті тұрақтылап, $\varphi(s) = K(x,s)$ деп алсақ,

$$\int_a^b \|K(x,s)\|^2 ds = 0$$

екені шығады, яғни $K(x,s) = 0$. Сонымен, егер $K_2(x,s)$ ядросының бірде-бір меншікті мәні жоқ болса, онда $K(x,s) \equiv 0$. Демек, егер $K(x,s) \neq 0$ болса, онда $K_2(x,s)$ қайталанушы ядросының кемінде бір меншікті мәні бар болады. Бұл жағдайда жоғарыдағы лемма бойынша $K(x,s)$ ядросының да кемінде бір меншікті мәні бар болады. 3-теорема дәлелденді.

Ескерту. (73) теңсіздігі $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні жоқ болатын $|\lambda| \leq \mu$ дөңгелегі ішінде орынды, басқаша айтқанда, ол μ саны $K(x,s)$ ядросының ең кіші меншікті мәнінен аз болғанда қанағаттанады.

$K(x,s)$ ядросының модуль шамасы бойынша ең кіші меншікті мәні λ_1 болсын, сонда λ_1^2 саны $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні болады. Егер $\mu < \lambda_1^2$ болса, (73) теңсіздігі орынды. Сол (73) теңсіздігінен $\mu \rightarrow \lambda_1^2$ болғанда

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi\|.$$

Бұл теңсіздікте теңдік қатысы $K(x,s)$ ядросының λ_1 меншікті мәніне сәйкес $\varphi_1(x)$ меншікті функциясы үшін орындалады. Расында, бұл жағдайда $\varphi_1 = \lambda K \varphi_1$. Бұдан:

$$K \varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(x), \|K \varphi_1\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi_1\| \Rightarrow \|K\| = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

4 теорема. Егер $K(x,s)$ симметриялық ядро болса, онда оның меншікті мәні сол ядро резольвентасының қарапайым полюсі болады.

Дәлелдеуі. Қарсы жорық, яғни λ_0 меншікті мән $R(x,s;\lambda)$ резольвентасының r ($r > 1$) ретті полюсі болсын. Онда $R(x,s;\lambda)$ Лоран қатарына жіктеледі.

$$R(x,s;\lambda) = \frac{\varphi_r(x,s)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \frac{\varphi_{r-1}(x,s)}{(\lambda - \lambda_0)^{r-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(x,s)}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x,s)(\lambda - \lambda_0)^k. \quad (74)$$

Мұндағы, $\varphi_r(x,s) \neq 0$. Резольвента:

$$\begin{aligned} R(x,s;\lambda) &= K(x,s) + \lambda \int_a^b K(x,t) R(t,s;\lambda) dt = \\ &= K(x,s) + \lambda_0 \int_a^b K(x,t) R(t,s;\lambda) dt + (\lambda - \lambda_0) \int_a^b K(x,t) R(t,s;\lambda) dt \end{aligned}$$

интегралдық теңдеуді қанағаттандырады.

$R(x,s;\lambda)$ орнына (74) теңдігінің оң жағын қойып, одан кейін алынған өрнектің екі жағындағы көпмүшеліктердегі $\lambda - \lambda_0$ айырымы коэффициенттерін теңестіріп,

$$\begin{aligned} \varphi_r(x,s) &= \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi_r(t,s) dt, \\ \varphi_{r-1}(x,s) &= \lambda_0 \int_a^b K(x,t) \varphi_{r-1}(t,s) dt + \int_a^b K(x,t) \varphi_r(t,s) dt \end{aligned} \quad (75)$$

теңдіктерін аламыз. Бұл теңдіктердің біріншісін $\varphi_{r-1}(x,s)$ -ке, ал екіншісін $\varphi_r(x,s)$ -ке көбейтіп, одан кейін алынған нәтижелерді қоссақ,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 \varphi_{r-1}(x,s) \int_a^b K(x,t) \varphi_r(t,s) dt - \lambda_0 \varphi_r(x,s) \int_a^b K(x,t) \varphi_{r-1}(t,s) dt + \\ &+ \varphi_r(x,s) \int_a^b K(x,t) \varphi_r(t,s) dt \end{aligned}$$

теңдігі шығады. Мұны x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ және ядроның симметриялығын пайдалансақ, онда

$$\int_a^b \varphi_r(x, s) \left(\int_a^b K(x, t) \varphi_r(t, s) dt \right) dx = 0,$$

одан кейін бұл өрнекке (75) теңдігін қолдансақ,

$$\frac{1}{\lambda_0} \int_a^b \varphi_r^2(x, s) dx = 0$$

немесе барлық жерде дерлік $\varphi_r(x, s) = 0$ екені шығады. Демек, $\varphi_r(x, s) \neq 0$ деген шартқа кері қорытынды алдық. Міне, бұл қайшылық теореманың орынды екенін дәлелдейді.

5 теорема. Әрбір шектелген интервалда $D(\lambda) = 0$ теңдеуінің ақырлы санды түбірлері бар болады.

Дәлелдеуі. Қарсы жорық, яғни $[A_1, A_2]$ кесіндісінде $D(\lambda) = 0$ теңдеуінің ақырсыз көп түбірлері жиыны $\{\lambda_k\}$ бар деп ұйғарайық. Әрбір $\tilde{\lambda}_k$ түбіріне $\tilde{\varphi}_k$ меншікті функциясы сәйкес келетіні, олардың

$$(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m; \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_k(x) = \tilde{\lambda}_k \int_a^b K(x, s) \tilde{\varphi}_k(s) ds$$

шарттарын қанағаттандыратыны белгілі. Соңғы теңдіктен $\frac{\tilde{\varphi}}{\lambda}$ өрнегі $K(x, s)$ ядросының $\tilde{\varphi}_k(s)$ ортонормаланған жүйесі бойынша Фурье коэффициенттері екенін көреміз. Бессель теңсіздігін пайдаланып,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\tilde{\lambda}_k^2} \tilde{\varphi}_k^2(x) \leq \int_a^b K^2(x, s) ds$$

теңсіздігін аламыз. Бұдан x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\tilde{\lambda}_k^2} \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) ds dx$$

Ал $\tilde{\lambda}_k^2 \leq A_k^2$ болғандықтан, соңғы теңсіздіктер

$$\sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{A_k^2} \right) \leq \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^2} \right) \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds = \|K\|^2 < \infty.$$

Егер $p \rightarrow \infty$ болса, соңғы теңсіздіктің сол жағы кез келген шамадан үлкен бола алады, сондықтан бұл теңсіздік орындалмайды. Міне, бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.